Τετάρτη 26 Απριλίου 2017

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας

Ορισμός: Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας ονομάζονται τα συστήματα για τα οποία χρειαζόμαστε μόνο μια παράμετρο για να καθορίσουμε πλήρως τη θέση του σώματος.

Για παράδειγμα, η εξίσωση
$m\ddot{x} = F(x)$, x η θέση του σώματος
ορίζει τη μοναδική παράμετρο $x = x(t)$.

Η λύση της εξίσωσης καθορίζει τόσο τη θέση όσο και την ταχύτητα του σώματος $v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$

Η εξίσωση αυτού του τύπου είναι προφανώς αυτόνομη και μπορεί να αντιστοιχηθεί σε ένα ολοκλήρωμα κίνησης

$$m\ddot{x}\cdot\dot{x} = F(x)\cdot\dot{x} \Rightarrow m\int \ddot{x}\dot{x}\,dt = \int F(x)\cdot\underbrace{\dot{x}\,dt}_{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 - \int F(x)\,dx = E = \text{σταθερή}$$

Ονομάζω $V(x) = -\int F(x)\,dx$ και τότε

$$\boxed{\frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + V(x) = E}$$

Η σταθερά ολοκλήρωσης που αντιστοιχεί και στην ενέργεια υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες

$$E = \frac{1}{2}m[\dot{x}(0)]^2 + V(x(0))$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 = E - V(x) \text{ ; Πρέπει } E - V(x) \geq 0$$

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m}[E - V(x)] \Rightarrow \boxed{\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)}}$$

$\rightarrow$

Τα αντίστοιχα πρόσημα, αντιστοιχούν στα τμήματα της τροχιάς τα οποία έχουν θετική ή αρνητική ταχύτητα αντίστοιχα.

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - V(x)} \Rightarrow dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\left[E - V(x)\right]^{-1/2} dx \Rightarrow$$

$$\int_{t_0}^{t} dt = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\left[E - V(x)\right]^{-1/2} dx \Rightarrow$$

$$\boxed{t - t_0 = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_0}^{x}\left[E - V(x)\right]^{-1/2} dx}$$

Η λύση της εξίσωσης $x = x(t) = x_0$ για την οποία $V(x) = \dot{x} = 0$ καλείται σημείο ισορροπίας.
Στη θέση αυτή το σώμα ισορροπεί δηλαδή έχει μηδενική ταχύτητα.
Για τη θέση ισορροπίας όταν $\dot{x} = 0$ δηλαδή $E = V(x)$
με $V(x) = -\int F\,dx \Rightarrow F(x) = -\frac{dV}{dx}$

$F(x_0) = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = 0$ δηλαδή η θέση ισορροπίας αντιστοιχεί στα μέγιστα ή στα ελάχιστα της δυναμικής ενέργε[ιας].
Αυτό είναι το σταθερό σημείο της εξίσωσης.

Τρόποι εύρεσης των σημείων ισορροπίας.

1) Η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $F(x_0) = 0$

2) Η λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $E = V(x)$

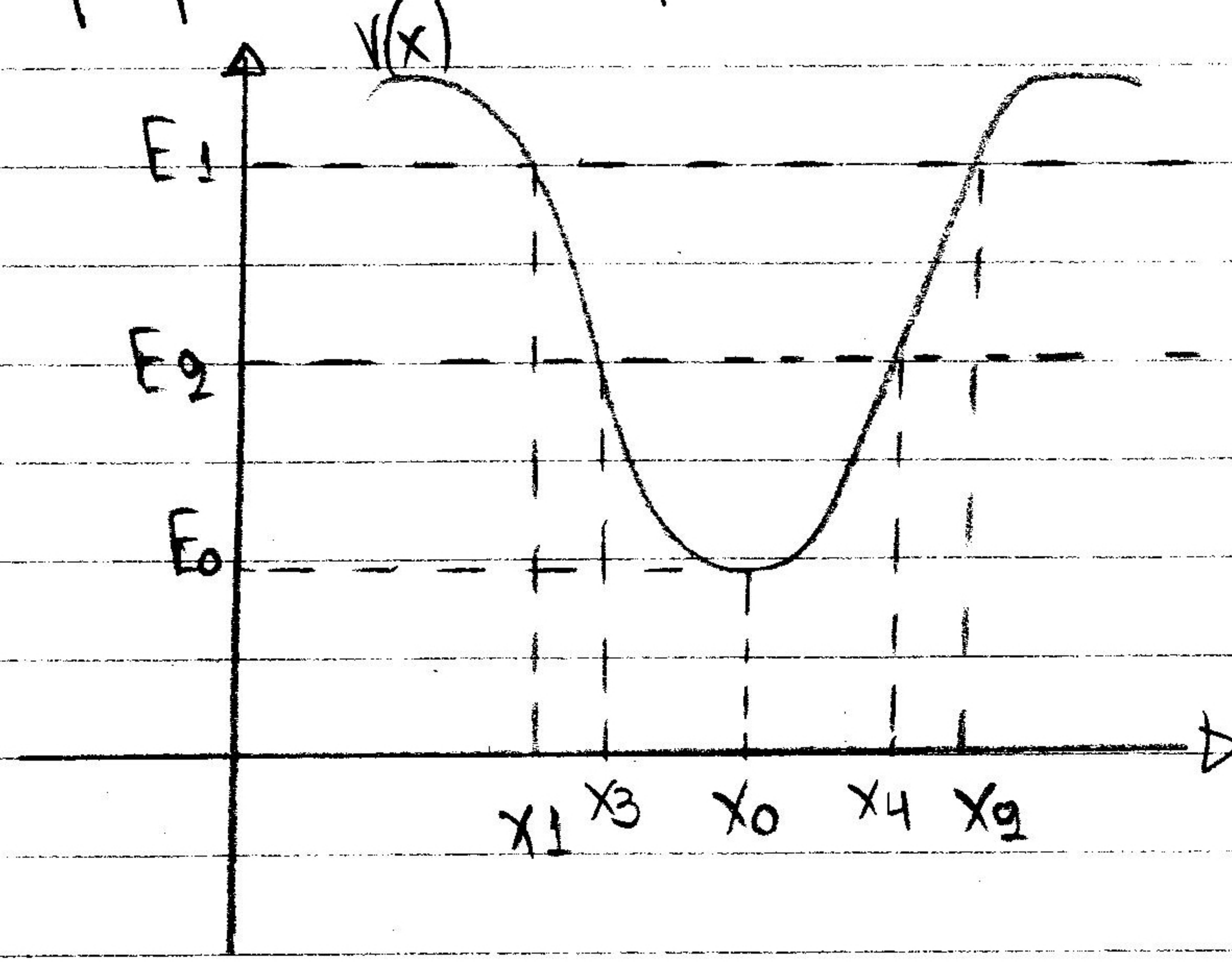
3) Η εύρεση των ακροτάτων της $V(x)$.

$\longrightarrow$

Παρατήρηση: Μέσω της διαφορικής εξίσωσης μπορώ με στοιχειώδη τρόπο να βρω τα όρια της κίνησης.
Στην περίπτωση αυτή δεν χρειάζεται να λύσω τη διαφορική εξίσωση. Τα όρια της κίνησης καθορίζονται από την ανισότητα $E - V(x) > 0$ ή $\boxed{V(x) < E}$
(δηλαδή τα όρια μέσα στα οποία κινείται εξαρτάται από.)

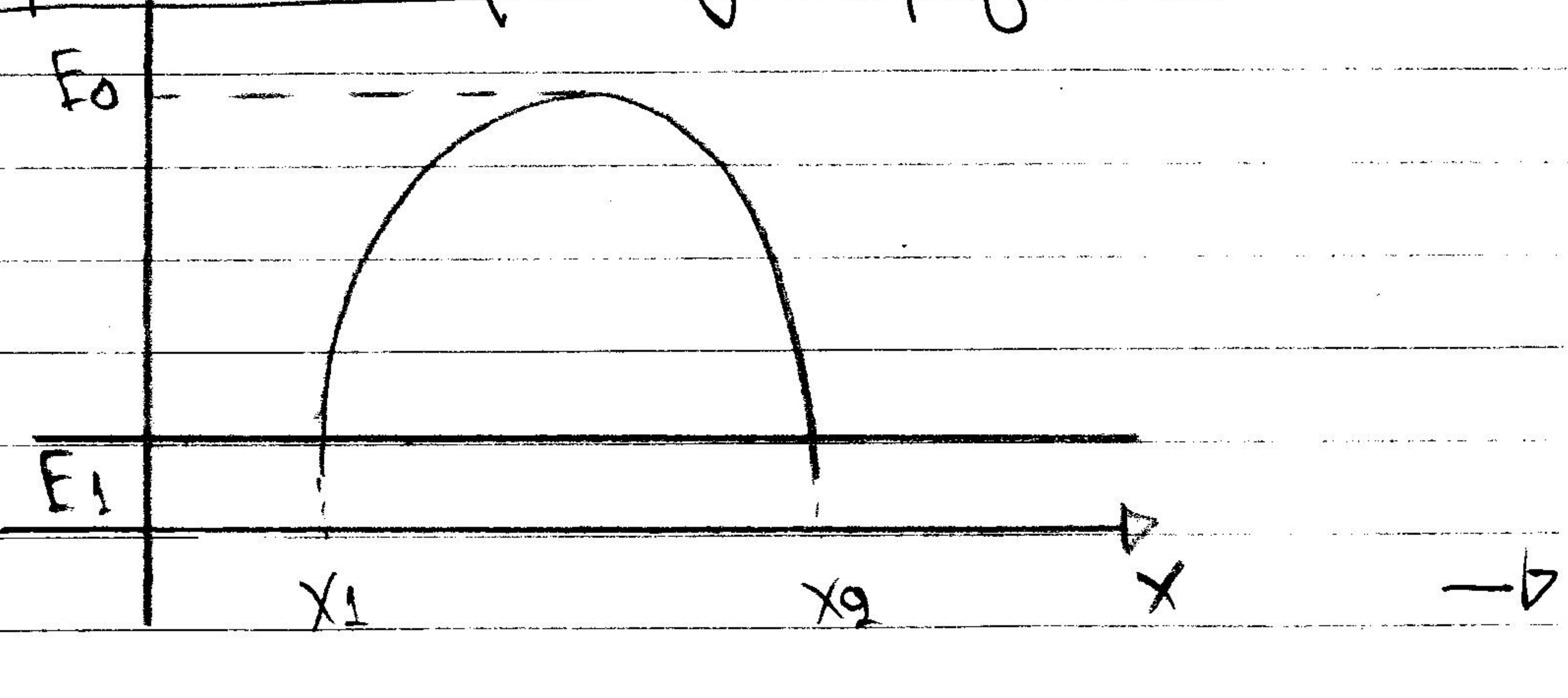
Δυναμικά που παρουσιάζουν ελάχιστα.

Θεωρούμε ένα δυναμικό $V(x)$



E_1 είναι η ενέργεια που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες.
Τότε $V(x) \leq E_1 \Leftrightarrow \boxed{x_1 \leq x \leq x_2}$

Δυναμικά που παρουσιάζουν μέγιστα.



$V(x)$, όπως στο σχήμα με λύση της ανίσωσης

$$V(x) < E \Rightarrow \begin{cases} x \leq x_1 \\ x \geq x_2 \end{cases}$$

Η κίνηση επιτρέπεται <u>εντός</u> των ορίων του δυναμικού!

<u>Παράδειγμα</u>: Να βρεθούν τα όρια της κίνησης ενός σώματος που εκτοξεύεται σε κατακόρυφη διεύθυνση από την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα V_0

<u>Απάντηση</u>: Νόμος παγκόσμιας έλξης: $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$

M: μάζα Γης
m: μάζα σώματος
R: ακτίνα Γης.

$$t=0: \quad r(0) = R$$
$$\dot{r}(0) = V_0$$

Νόμος Newton: $m\ddot{r} = -G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow \boxed{\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}}$

$\ddot{r} = F(r) = -\frac{GM}{r^2} \times \dot{r}$ (πολλαπλασιάζω $\times \dot{r}$)

$$\ddot{r}\dot{r} = -\frac{GM}{r^2}\cdot\dot{r} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 = \frac{GM}{r} + E$$

$$E: t=0 \Rightarrow E = \frac{1}{2}[\dot{r}(0)]^2 - \frac{GM}{r(0)} = \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{GM}{R}$$

$$E = \frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{GM}{r}, \quad V(r) = -\frac{GM}{r}$$

$$V(r) \leq E \Rightarrow -\frac{GM}{r} \leq \frac{1}{2}V_0^2 - \frac{GM}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{r} \geq \frac{GM}{R} - \frac{1}{2}V_0^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{r} \geq \frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2GM}}$$

Παρατήρηση:

Υπάρχει μια τιμή του V_0 για την οποία

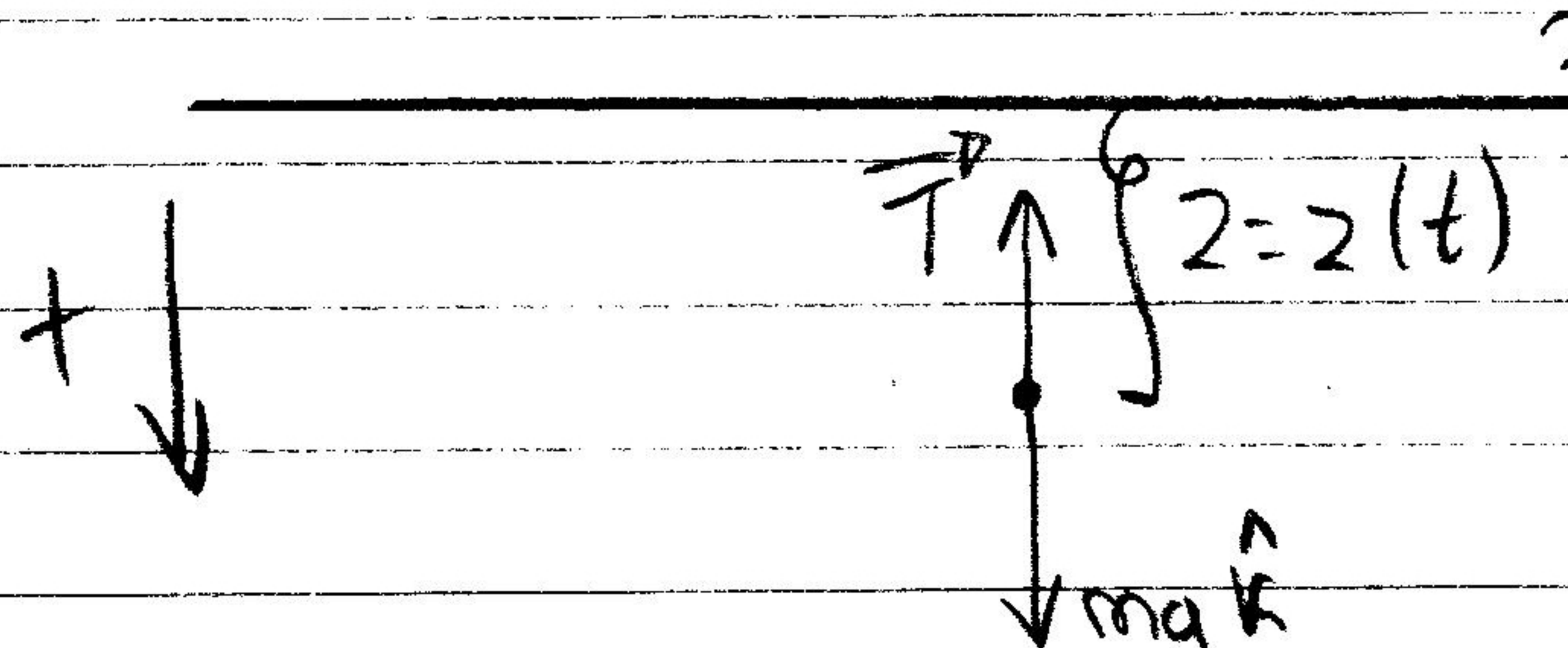
$$\frac{1}{R} - \frac{V_0^2}{2GM} = 0 \Rightarrow V_0^2 = \frac{2GM}{R} \Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

Η ταχύτητα $V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ καλείται ταχύτητα διαφυγής

και για να υπάρχει κίνηση πρέπει να ισχύει: $\boxed{V_0^2 \geq \frac{2GM}{R}}$

Παράδειγμα: Πτώση με αλεξίπτωτο

Τη στιγμή $t=0$ ένας αλεξιπτωτιστής βάρους mg πέφτει κατακόρυφα από το σημείο $z=0$, με ταχύτητα V_0. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη της ταχύτητας να βρείτε τη θέση και την ταχύτητα του, κάθε χρονική στιγμή.



$z(0)=0$
$\dot{z}(0)=V_0$

Νόμος Newton: $m\ddot{z} = (mg - T) = mg - \beta\dot{z}$

β αντίσταση του αέρα σταθερή $\Rightarrow \boxed{m\ddot{z} + \beta\dot{z} = mg}$

ή $\boxed{\ddot{z} + \beta/m \, \dot{z} = g}$ (Δευτέρου βαθμού Γραμμική Σταθερών Συντελεστών)

$x = \dot{z}$

$\boxed{\dot{x} + \beta/m \cdot x = g}$ (Γραμμική Πρώτου βαθμού)

$\ddot{z} + B/m \cdot \dot{z} = g$

<u>Ομογενής</u>: $\ddot{z}_h + B/m \cdot \dot{z}_h = 0 \Rightarrow \rho^2 + B/m \cdot \rho = 0 \Rightarrow \begin{cases} \rho = 0 \\ \rho = -B/m \end{cases}$

<u>Μερική λύση της μη-ομογενούς</u>: $\left.\begin{aligned} z_1 &= At \\ \dot{z}_1 &= A \\ \ddot{z}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{B}{m} \cdot A = g \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{gm}{B}}$

<u>Πλήρης λύση</u>:

$z = c_1 \cdot e^{-B/m \cdot t} + c_2 + \frac{gm}{B} t$

Αρχικές συνθήκες: $\left.\begin{aligned} z(0) &= 0 \\ \dot{z}(0) &= V_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ -B/m \cdot c_1 + \frac{gm}{B} = V_0 \end{cases}$

<u>Ταχύτητα πτώσης</u>

$V(t) = \dot{z}(t) = -Bc_1/m \, e^{-B/m \cdot t} + \frac{gm}{B}$

αν $t \to \infty$ $V(t) \to \frac{gm}{B}$ οριακή ταχύτητα πτώσης.

<u>Άσκηση</u>: Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα όταν:
$V_0 = \frac{gm}{B} = \dot{z}(0)$